Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES II (4 h)

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on appelle support de f l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$.

On dira, pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que f est de classe C^m, $m \in \mathbb{N}$ (resp. C^∞) si f est m-fois continûment dérivable (resp. indéfiniment dérivable) et on notera $f^{(j)}$ la dérivée d'ordre j de f avec $f^{(0)} = f$.

I

Pour tout nombre réel $t > 0$, on note χ_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\chi_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si} \quad x \in [0, t], \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, t]. \end{cases}$$

Pour φ et ψ deux fonctions complexes, à support compact, définies sur $\mathbb{R}$, chacune d'elles étant soit continue, soit du type χ_t, on pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - \sigma)\, \psi(\sigma)\, d\sigma.$$

1° Soient t_1 et t_2 deux nombres réels > 0; montrer que la fonction $\chi_{t_1} * \chi_{t_2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact contenu dans le segment $[0, t_1 + t_2]$.

2° Soient t un nombre réel > 0 et φ une fonction complexe de classe C^k sur $\mathbb{R}$, k entier $\geqslant 0$, à support compact contenu dans le segment $[0, a]$, $a > 0$; montrer que la fonction $\varphi * \chi_t$ est de classe C^{k+1} et à support compact contenu dans le segment $[0, a + t]$.

3° Soit $(t_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de nombres réels > 0. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose :

$$\varphi_1 = \chi_{t_1} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \varphi_{n-1} * \chi_{t_n} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2.$$

a. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\sigma)\, d\sigma$. On rappelle que si f est une fonction complexe continue sur un pavé $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ alors on a :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, φ_n est de classe C^{n-2}, à support compact contenu dans le segment $[0, t_1 + t_2 + \ldots + t_n]$, et vérifie :

— pour $j = 0, \ldots, n - 2$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\, \varphi_n^{(j)}(x)\, | \leqslant \frac{2^{j+1}}{t_1 \ldots t_{j+1}};$$

— pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{t} |\, \varphi_n^{(n-2)}(x) - \varphi_n^{(n-2)}(x - t)\, | \leqslant \frac{2^n}{t_1 \ldots t_n}.$$

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, pour tout entier $m \geqslant 1$ et pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant n - 3$, on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\, \varphi_n^{(j)}(x) - \varphi_{n+m}^{(j)}(x)\, | \leqslant \frac{2^{j+2}}{t_1 \ldots t_{j+2}} (t_{n+1} + \ldots + t_{n+m}).$$

d. En déduire que l'on peut choisir $(t_j)_{j \geqslant 1}$ de sorte que la suite $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ soit uniformément convergente vers une fonction φ positive ou nulle, non identiquement nulle, à support compact et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II

1° *a.* Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ N nombres complexes; montrer que le déterminant D_N défini par :

$$D_N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_N^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \ldots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix}$$

est égal à $\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant N} (\lambda_i - \lambda_j)$.

b. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on considère le système linéaire :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (-1)^n 2^{kn} = 1 \\ n = 0, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Montrer que ce système admet une solution unique, notée $(\mu_{k,N})_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$. Calculer cette solution.

c. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, la suite $(\mu_{k,N})_{N \geqslant k+1}$ admet une limite, notée μ_k, quand N tend vers $+\infty$.

d. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k (-1)^n 2^{kn}$$

est absolument convergente et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k (-1)^n 2^{kn} = 1.$$

2° Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact contenu dans le segment $[0, 1]$, et vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sigma)\, d\sigma = 1$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{x+1} \varphi(x - \sigma)\, d\sigma.$$

Montrer que Φ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\Phi(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $\Phi(x) = 0$ si $x \geqslant 2$.

3° *a.* Pour tout entier $m \geqslant 0$, on désigne par $C^m(\overline{\mathbb{R}_+})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$, de classe C^m, dont les dérivées $f^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, admettent une limite à droite en $x = 0$.

Montrer que l'espace $C^m(\overline{\mathbb{R}_+})$ coïncide avec l'espace des restrictions à $]0, +\infty[$ des fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}$.

b. On désigne par $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$, de classe C^∞, dont les dérivées $f^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, admettent une limite à droite en $x = 0$.

Pour $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, on pose :

$$(Pf)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k \Phi(-2^k x) f(-2^k x) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où μ_k, $k \in \mathbb{N}$, et Φ ont été définis au 1° *c.* et 2° respectivement.

Montrer que Pf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; en déduire que l'espace $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ coïncide avec l'espace des restrictions à $]0, +\infty[$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c. On désigne par $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ indéfiniment différentiables sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et qui se prolongent ainsi que toutes leurs dérivées partielles, en une fonction continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Montrer que l'espace $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ coïncide avec l'espace des restrictions des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^2$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail